173. Pseudo-regular function ノ應用

角谷靜夫（阪大）

128, 136 デ述ベタ pseudo-regular ナ函數ニヨル transformation ヲ Riemann 面ノ問題ニ應用シテ見マシタ。

136 デ考ヘタ pseudo-regular function $f(z)=u+iv$ ハ u_x, u_y, v_x, v_y ガ $f(z)$ ノ定義領域 D 全体デ連續デアッタガ D ガ有限個又ハ可附番無限個ノ部分領域ニワカレテソノ各々ニテ u_x, u_y, v_x, v_y ガ連續デアッテモ同様ノコトガ成立スル。（u, v ガ連續デアルコト及ビ條件 (ii), (iii) ハ D 全体ニテ滿足サレテキルモノトスル）

ρ ヲ $0<\rho<1$ ナル實數トスルトキ，任意ニ

$$|\alpha|\leqq\rho$$

ナル α ヲ與ヘルト

$$f(0)=\alpha,$$

$|z|=1$ ニテ $f(z)=z$

ナル如キ $|z| \leqq 1$ ニテ *pseudo-regular* デ且 $q(x,y) < K(\rho)$ ナル函数 $f(z)$ が存在スル。コヽニ $K(\rho)$ ハ ρ ノミニ関係スル正数デアル。

更ニ一般ニDヲ一ツノ領域 D′ ヲ全クD内ニアルDノ部分領域トスルトキ，D′内ノ任意ノ点ヲ他ノD′内ノ任意ノ点ニ移シテ且ツDノ周ヲ少シモカヘナイD自身ノ *schlicht* ナ *pseudo-regular* ナ *transformation* ニテ $q(x,y) < K$ ナルモノが存在スル。コヽニKハD,D′ノ形ノミニ関係スル正数デアル。

定理1. q が有界ナ *pseudo-regular* ナ函数 $w=f(z)$ ニヨッテ $|z|<\infty$ ハ $|w|<R<\infty$ ニ寫像スルコトハ出來ナイ.

コレハ136号定理6ノ特別ノ場合デアリマス。

コレヨリ次ノ定理が得ラレル。

定理2. 単一連結ナ *Open* ナ *Riemann* 面 Σ ヲ q が有界ナル如キ *pseudo-regular* ナ函数ニヨッテ（同ジク）単一連結ナ *Riemann* 面 Σ' ニ *topologically* ニ *transform* シテモ *Riemann* 面ノ *type*（*hyperbolic* デアルカ *parabolic* デアルカ）ハ変ラナイ。

Σ 全体が変形サレナクテ，ソノ一部分ダケ変形サレテモヨイ.

即チ Σ ノ上ニ（*Riemann* 面ノ上デ考ヘテ）互ニ他

ノ外部ニアル有限個又ハ可附番無限個ノ領域 D_i（必ズシモ単一連結デナクテモヨイ．又 Σ ノ上ニテ互ニ他ノ外部ニアレバヨイノデアルカラ projection ハ重ナッテ來テモヨイ）ヲ取リ、各ミノ D_i ノ内部ニ q ガ（i ニ無関係ナ）Kヲ越ヘナイヤウナ pseudo-regular + Transformation ヲ施シテモ Σ ノ type ハ変ラナイ。

D_i トシテ Σ ヲ（projection 上ノ）閉曲線 C_i ニヨッテ切リ取ッタトキノ連結シタ部分ヲ取リ前ノ lemma ヲ用ヒルト次ノコトガ云ヘマス。

0, 1, ∞ ノ上ニ無限ニ多クノ logarithmic singularity ヲ持ツ Riemann 面 Σ（例ヘバ modular-function ノモノ）ヲ deform シテ Σ 上ノ log. singl. ヲ各ミ異ナル方向ヘ少シズラシテモ，ヤハリ hyperbolic デアル。

（コレハ Speiser ガ考ヘタ問題デス。Commentarii Math. Helv. Vol 1, (1929) Probleme……, §6）

Σ ノ log. singl. ヲズラシテ行クトキ，コレラガ夫々 0, 1, ∞ ヲ内部ニ含ンデ且ツ互ニ他ノ外部ニアル三ツノ領域 E_1, E_2, E_3 ヨリ外ニ出ナイトキハ Ahlfors ガ証明シテ居リマス。（Acta Soc. Scient. Fennicae, 1933）

又次ノ Ahlfors ノ定理モアル制限ノ下デ証明スルコトガ出來マス。

Ahlfors ニヨレバ Σ ガ parabolic デアルトキ

Σヲ（球面ノ上ニテ考ヘル）互ニ他ノ外部ニアル5個ノ円 C_i $(i=1,2,\cdots\cdots,5)$ ニテ切レバ切口ニハ少クトモ一ツ単葉ナモノガアル。

今若シコノ切口がスベテ二枚ヅツツナガツテキルトスレバΣが *hyperbolic* ニナルコトハ次ノ様ニシテ証明出來ル。

C_iト同心ナ円デ且ツコレヲ内部ニ含ミ、シカモ互ニ他ノ外部ニアル円 C_i^* $(i=1,2,\cdots\cdots,5)$ ヲ考ヘ C_i^* ヲ *lemma* ニテ考ヘタ函数ニヨツテ *transform* シテ C_i 内ニアルΣノ代数的分岐点ヲC_iノ中心ヘウツス。

カクシテ得ラレタΣ'ハ *Carathéodory-Bloch* ノ定理ニヨツテ *hyperbolic* デアルカラΣモ *hyperbolic* デナケレバナラヌ。

C_iが一般ノ閉曲線デアル場合モ同様デアリ、C_iニヨル切口が常ニ2枚デナクテモ枚数が有界デアレバ同ジコトが証明出來マス。（有限枚ヨリナル *Riemann* 面ニ関スル前ノ *lemma* ト同様ノ *lemma* ヲ用ヒマス）

更ニ一般ニq個ノ互ニ他ニ交ハラヌ閉曲線 C_i $(i=1,2,\cdots\cdots,q)$ ニヨツテΣヲ切ツタトキ，C_iニヨル切口が常ニ少クトモ m_i 枚ツナガリ且ツ

$$\sum_{i=1}^{q}\frac{1}{m_i}<q-2$$

デアレバΣハ *hyperbolic* デアルト云フコトがスベテ

ノ C_i ニヨル切口ノ枚数ガ有界デアレバ同様ノ方法デ証明出来マス。